RÉSOUDRE EN TEMPS LINÉAIRE LE PROBLÈME DE LA MULTICOUPE MINIMUM DANS DES GRILLES RECTANGULAIRES

C. BENTZ[1], M.-C. COSTA[2], and F. ROUPIN[3]

[1] CEDRIC-CNAM, 292, rue Saint-Martin 75141 Paris Cedex 03
cedric.bentz@cnam.fr
[2] CEDRIC-CNAM, 292, rue Saint-Martin 75141 Paris Cedex 03
costa@cnam.fr
[3] CEDRIC-IIE-CNAM, 18, allée Jean Rostand 91025 Evry Cedex
roupin@iie.cnam.fr

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, et soit $\mathcal{L}$ un ensemble de K couples (source s_k, puits t_k) de sommets terminaux de G. Chaque couple (s_k, t_k) définit une *liaison*. On considère le *problème de la multicoupe minimum* (PMCM) : il consiste à retirer un sous-ensemble d'arêtes de cardinal minimal de façon à séparer s_k de t_k pour chacune des K liaisons. Il est bien connu que ce problème peut se modéliser par un programme linéaire en nombres entiers. La relaxation continue de PMCM est le dual du programme linéaire associé au *problème du multiflot continu maximum* dans une grille à capacité uniforme. Ce problème consiste à maximiser la somme des flots routés pour chacune des K liaisons, tout en respectant les contraintes de capacité sur les arêtes. La valeur de tout multiflot admissible est donc inférieure à la valeur de toute multicoupe [3].

PMCM est un problème NP-difficile dans les graphes planaires [4]. Il reste NP-difficile dans les grilles lorsque tout sommet peut être un terminal [2].

On s'intéresse ici à des grilles rectangulaires particulières. On suppose que les terminaux sont situés sur les lignes inférieure et supérieure de la grille, et qu'ils sont tous distincts. En outre, chaque terminal est relié à la grille par une unique arête, comme dans [6].

Pour résoudre PMCM dans ce type de grilles, on utilise la relation de dualité déjà mentionnée. Dans la première partie de cet article, nous étudions un problème auxiliaire : construire un sous-ensemble de $\mathcal{L}$ vérifiant une condition simple et nécessaire pour l'existence d'un multiflot continu. En modélisant ce problème par un programme linéaire continu (PLL), on interprète toute solution entière du programme dual associé (DC) comme une multicoupe d'une forme très particulière. (PLL) possède deux propriétés importantes : la première est que sa matrice des contraintes est totalement unimodulaire ; la seconde est qu'il existe effectivement un multiflot continu ayant pour valeur l'optimum de (PLL). Cette dernière propriété se démontre en utilisant un théorème présenté dans [5].

Ceci permet de conclure que toute solution de base optimale de (DC) définit une multicoupe ayant la même valeur qu'un multiflot continu, et constitue donc une solution optimale pour PMCM. Par conséquent, on peut résoudre PMCM en temps polynomial à l'aide de la programmation linéaire.

Dans la seconde partie, nous proposons un algorithme combinatoire pour résoudre (DC). Cet algorithme comporte deux phases : dans la première, on parcourt la grille de gauche à droite pour sélectionner un sous-ensemble de liaisons. On obtient alors une solution optimale pour (PLL). Dans la seconde phase, on parcourt la grille dans l'autre sens, de droite à gauche, et on construit une multicoupe en fonction des liaisons précédemment sélectionnées. On obtient ainsi une solution optimale pour (DC), et donc une multicoupe optimale pour PMCM.

On prouve l'optimalité de cet algorithme en utilisant les conditions des écarts complémentaires associées aux deux programmes linéaires (PLL) et (DC). On remarque que la première phase de l'algorithme peut se ramener à la résolution d'un problème de Call Control sur une chaîne, et peut donc être exécutée en $O(K)$ (d'après [1]). Nous montrons comment implémenter la seconde phase en $O(K)$ également. Finalement, on obtient un algorithme résolvant PMCM en $O(K)$.

Références

1. U. Adamy, C. Ambuehl, R.S. Anand et T. Erlebach. Call Control in Rings. Proceedings ICALP, Lecture Notes in Computer Science 2380 (2002), pp. 788-799.
2. C. Bentz, M.-C. Costa et F. Roupin. Maximum integer multiflow and minimum multicut problems in two-sided uniform grid graphs. Rapport technique CEDRIC No 674 (2004). http ://cedric.cnam.fr (soumis à *Journal of Discrete Algorithms*).
3. M.-C. Costa, L. Létocart et F. Roupin. Minimal multicut and maximal integer multiflow : A survey. *À paraître dans EJOR (disponible en ligne).*
4. N. Garg, V. V. Vazirani et M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. Algorithmica 18 (1997), pp. 3-20.
5. H. Okamura et P.D. Seymour. Multicommodity flows in planar graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B 31 (1981), pp. 75-81.
6. K. Weihe. Edge-disjoint routing in plane switch graphs in linear time. FOCS, New York City (1999), pp. 330-340.