# ROADEF 2015, Programmation linéaire mixte robuste avec variables de recours continues


Pierre-Louis Poirion[1], Marie-Christine Costa[2], Alain Billionnet[3]

[1] LIX, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France
poirion@lix.polytechnique.fr

[2] ENSTA ParisTech-CEDRIC, 828, Boulevard des Maréchaux 91762 Palaiseau Cedex
Marie-Christine.Costa@ensta-paristech.fr

[3] ENSIIE(Evry)-CEDRIC, 1 Square de la Résistance F-91025 Évry Cedex France
Alain.Billionnet@ensiie.fr



**Mots-cls** : *optimisation robuste, programmation linéaire en nombres entiers, génération de contraintes*


## 1 Introduction

Soit le programme linéaire mixte suivant :

$$
(MILP) \left| \begin{array}{ll}
\min\limits_{x,y} \ \alpha.x + \beta.y & \\
\quad Ax + By \geq d & (1) \\
\quad Cx \geq b & (2) \\
\quad x_i \in \mathbb{N}, \ i = 1, ..., p_1, \ x_i \in \mathbb{R}_+, \ i = (p_1 + 1), ..., p, \ y \in \mathbb{R}^q_+ &
\end{array} \right.
$$

où tous les coefficients sont rationnels.

Nous étudions la résolution de (MILP) en présence d'incertitudes sur les ~~coefficients des contraintes (à droite et à gauche), sans qu'il existe de distribution connue des~~ données. La matrice $A$ et le second membre $d$ sont soumis à des incertitudes et appartiennent respectivement aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$. Un vecteur $x$ sera dit admissible si il satisfait (2) et nous dirons que (MILP) satisfait la propriété de recours complet si pour tout $x$ admissible et pour toutes valeurs de $A$ dans $\mathcal{A}$ et $d$ dans $\mathcal{D}$, il existe un vecteur $y$ satisfaisant (1).

Ces problèmes ont été étudiés, en cas d'incertitude sur les seconds membres des contraintes (cf. [1, 2, 3, 5, 10]). Il s'agit de résoudre un problème en deux étapes : les variables $x$ de première étape, ou variables de décision, concernent les décisions à prendre avant que l'incertitude sur les données ne soit levée ; les variables $y$ de deuxième étape, ou variables de recours, ne sont calculées qu'une fois l'incertitude levée. Les variables de décision peuvent être aussi bien entières que continues et les variables de recours sont continues.

## 2 Le problème robuste de base

### 2.1 Le problème robuste

Par souci de clarté de la présentation nous supposerons dans un premier temps que seul le membre de droite $d$ peut varier et que (MILP ) satisfait la propriété la recours complet. Le problème robuste peut alors se modéliser par le programme en deux étapes ci-dessous :

$$
PR \left| \begin{array}{lll} \min\limits_{x} & \alpha.x \; + \; \max\limits_{d \in \mathfrak{D}} \; \min\limits_{y} \beta.y & \\ & & By \geq d - Ax \\ & & y \in \mathbb{R}^q_+ \\ & Cx \geq b & \\ & x_i \in \mathbb{N}, \; i = 1, ..., p_1, \; x_i \in \mathbb{R}_+, \; i = (p_1+1), ..., p. & \end{array} \right.
$$

Remarquons que puisque la propriété de recours complet et vérifiée, $PR$ admet une solution optimale si et seulement l'ensemble des vecteurs $x$ admissibles est non vide.

Pour tout $x$ réalisable, nous définissons le programme mathématique suivant, $R(x)$, appelé "Programme de recours" :

$$
R(x) \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{d \in \mathfrak{D}} \; \min\limits_{y} & \beta.y \\ & By \geq d - Ax \\ & y \in \mathbb{R}^q_+. \end{array} \right.
$$

On peut alors réécrire le programme robuste de la façon suivante :

$$
PR \left| \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \alpha.x + v(R(x)) \\ & Cx \geq b \\ & x_i \in \mathbb{N}, \; i = 1, ..., p_1, \; x_i \in \mathbb{R}_+, \; i = (p_1+1), ..., p. \end{array} \right.
$$

où $v(R(x))$ correspond à la valeur, à l'optimum, du problème de recours

**Proposition 1** *La fonction qui a $x$ associe $\alpha.x + v(R(x))$ est convexe.*

Ainsi, le problème robuste est un problème d'optimisation convexe en variables entières. Nous donnons maintenant une propriété sur les solutions optimales du problème de recours.

**Definition 1** *Soit $x$ réalisable et soit $(d^*, y^*) \in \mathfrak{D} \times \mathbb{R}^T_+$ une solution optimale de $R(x)$. Nous dirons que $d^*$ est un scénario extrême associé à $x$.*

**Corollaire 1** *Pour tout $x$ réalisable, il existe un scénario extrême $d^*$ associé à $x$ tel que $d^*$ est un point extrême du polytope $\mathfrak{D}$.*

Nous voyons donc que nous pouvons nous restreindre aux points extrêmes de $\mathfrak{D}$ pour la résolution du problème de recours. Dans la suite de cette section, nous nous intéressons a la résolution de (PR) sur un ensemble d'incertitude $\mathcal{D}$ particulier.

Suivant l'idée proposée par ~~Bertsimas et Sim [6] et Minoux [8]~~, nous supposons que chaque coefficient $d_t, \; t = 1, ..., T$ appartient à un intervalle $[\bar{d}_t - \Delta_t, \bar{d}_t + \Delta_t]$ où $\bar{d}_t$ est donné et où $\Delta_t \geq 0$ est une borne donnée sur l'incertitude de $d_t$. ~~En outre, pour éviter de trop contraindre le système nous ajoutons comme dans [9], la contrainte :~~

$$
\cancel{\sum_{\substack{t=1 \\ \Delta_t > 0}}^{T} \left| \frac{d_t - \bar{d}_t}{\Delta_t} \right| \leq \bar{\delta},} \tag{3}
$$

~~où $\bar{\delta}$ est un entier positif qui borne la somme totale des variations des $d_t$. Soit, pour tout $t = 1, ..., T$, la variable $\delta_t \in [-1, 1]$ modélisant l'incertitude sur $d_t$. On a alors $d_t = \bar{d}_t + \delta_t \Delta_t, \; \forall t = 1, ..., T$. En utilisant en outre le fait qu'il existe un scénario extrême $d$ tel que $d_t \geq \bar{d}_t$ pour tout $t$, on montre que~~ l'ensemble d'incertitude $\mathfrak{D}$ se réécrit :

$$
\mathfrak{D} = \{d : \; d_t = \bar{d}_t + \delta_t \Delta_t, \; \sum_{t=1}^{T} \delta_t \leq \bar{\delta}, \; 0 \leq \delta_t \leq 1, \; \forall t = 1, ..., T\}.
$$

### 2.2 Résolution du problème de recours

Pour résoudre le problème de recours (de type "max min") pour $x$ fixé, le sous problème de minimisation est transformé en un problème de maximisation en considérant son dual. On obtient alors un problème de maximisation d'une fonction quadratique non concave. Nous montrons que, quels que soient les coefficients du problème de recours, il est toujours possible de réécrire les termes quadratiques en un produit d'une variable $0-1$ et d'une variable continue et bornée. Nous pouvons alors linéariser ces termes quadratiques pour aboutir à un problème linéaire mixte. Plus précisément, nous montrons que $v(R(x)) = v(LDR(x))$ où $LDR(x)$ est le programme linéaire en variable mixte ci-dessous :

$$
LDR(x) \left| \begin{array}{ll}
\max\limits_{\lambda,\delta,\nu} \sum_{t=1}^{T}[(\bar{d}_t - (Ax)_t)\lambda_t + \Delta_t \nu_t] & \\
B^{tr}\lambda \leq \beta & \\
\sum_{t=1}^{T} \delta_t \leq \bar{\delta} & \\
\nu_t \leq \lambda_t, & t = 1, ..., T \\
\nu_t \leq \Lambda \delta_t, & t = 1, ..., T \\
\lambda, \nu \in \mathbb{R}_+^T & \\
\delta_t \in \{0, 1\}, & t = 1, ..., T.
\end{array} \right.
$$

où $\Lambda > 0$ est une constante qui peut être calculée explicitement à partir de $B$ et $\beta$.

### 2.3 Résolution du problème robuste

Afin de résoudre le problème robuste $PR$, nous le réécrivons d'abord comme un programme linéaire équivalent comportant un nombre exponentiel de contraintes, puis nous utilisons un algorithme de génération de contraintes pour le résoudre. Plus précisément, le problème robuste peut se réécrire en le programme linéaire en variables mixtes suivant :

$$
PR \left| \begin{array}{l}
\min\limits_{x,z} \alpha.x + z \\
\\
z \geq \sum\limits_{t=1}^{T}[(\bar{d}_t - (Ax)_t)\lambda_t^s + \Delta_t \nu_t^s], \ 1 \leq s \leq S \\
Cx \geq b \\
x_i \in \mathbb{N}, \ i = 1, ..., p_1, \ x_i \in \mathbb{R}_+, \ i = (p_1 + 1), ..., p, \ z \in \mathbb{R}
\end{array} \right. \tag{4}
$$

où $\lambda^s, \nu^s, \ s \in S$ sont des points extrêmes d'un polyèdre définis à partir des contraintes de $LDR(x)$.

L'algorithme de génération de contraintes~~, alors utilisé, consiste à~~ :
initialement, on considère une seule contrainte de (4) ; à l'étape $k$, nous considérons un sous ensemble de $S^k$ contraintes (4) et nous résolvons le programme relâché, $PR^k$, correspondant. La solution obtenue est notée $(x^k, z^k)$. Nous résolvons alors $LDR(x^k)$, pour vérifier si $(x^k, z^k)$ est une solution optimale. Si ce n'est pas le cas, une nouvelle contrainte est ajoutée au problème maître.

## 3 Généralisations

### 3.1 Sans l'hypothèse de recours complet

Dans la section précédente, nous avons supposé que le problème déterministe satisfaisait la propriété de recours complet. Nous montrons maintenant que nous pouvons étendre nos résultats au cas où nous supposons seulement que le problème robuste $PR$ admet une solution optimale, c'est-à-dire qu'il existe $x$ tel que pour tout $d$ dans $\mathfrak{D}$, il existe une solution réalisable $y$ de $R(x, d)$. ~~Cependant nous montrons~~ que notre méthode permet ~~aussi~~ de détecter les cas où le problème robuste n'a pas de solution. Par souci de clarté, avant de donner la preuve dans le cas général, nous traitons le cas où toutes les variables de décisions sont entières. Dans les deux cas, nous considérons un nouveau programme déterministe, $P_\varepsilon$, vérifiant la propriété de recours complet où de nouvelles variables de recours $w_t$ affectées d'un coefficient dépendant de $\varepsilon$ dans la fonction objectif, ont été ajouté. Nous montrons alors que lorsque $\varepsilon$ est suffisamment petit, toute solution optimale du programme robuste associé à $P_\varepsilon$ est aussi une solution optimale de $PR$. Nous testons ensuite notre approche sur un problème de production dans lequel une entreprise décide de construire des usines pour fabriquer plusieurs produits afin de répondre à une demande sur chacun de ces produits.

### 3.2 Généralisation à d'autres ensembles d'incertitudes

Dans les parties précédentes, nous avons supposé que les coefficients incertains s'écrivaient $d_t = \bar{d}_t + \delta_t \Delta_t \ \forall t$, où les variables $\delta_t$ expriment l'incertitude et vérifient $\sum_{t=1}^{T} \delta_t \leq \bar{\delta}$. Nous montrons maintenant que nous pouvons généraliser nos résultats au cas où $d$ peut s'écrire $d = \bar{d} + D\delta$, où le vecteur $\bar{d}$ et la matrice $D$ sont donnés et où $\delta$ appartient à un polytope $\mathcal{D}$ dont les points extrêmes $(d^1, ..., d^S)$ sont connus. Remarquons que cette définition de l'incertitude englobe celle de Babonneau et al. dans [2].

## 4 Perspectives

La méthode présentée pour résoudre un problème robuste ne satisfaisant pas la propriété de recours peut nécessiter d'introduire de très grands coefficients dans les modèles mathématiques, qui peuvent alors devenir difficiles à manier. Dans ces cas là, il est nécessaire d'avoir une procédure qui ramène l'étude de tels modèles à des problèmes que l'on peut résoudre efficacement.

## Références


[1] A. Atamturk. Strong formulations of robust mixed 0-1 programming. *Mathematical Programming*, 108 :235–250, 2006.

[2] F. Babonneau, O. Klopfenstein, A. Ouorou, and J.-P. Vial. Robust capacity expansion solutions for telecommunication networks with uncertain demands. http ://www.optimization-online.org/$DB_HTML$/2010/08/2712.*html*, 2010.

[3] A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer, and A. Nemirovski. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, 99 :351–376, 2004.

[4] D. Bertsimas, D.B. Brown, and C. Caramanis. Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53 :464–501, 2011a.

[5] D. Bertsimas, D. Pachamanova, and M. Sim. Robust linear optimization under general norms. *Operations Research Letters*, 32 :510–516, 2004.

[6] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52 :35–53, 2004.

[7] V. Gabrel, M. Lacroix, C. Murat, and N. Remli. Robust location transportation problems under uncertain demands. *Discrete Applied Mathematics, available online.*

[8] M. Minoux. On 2-stage robust LP with RHS uncertainty : complexity results and applications. *Journal of Global Optimization*, 49 :521–537, 2011.

[9] A. Thiele, T. Terry, and M. Epelman. Robust linear optimization with recourse. http ://www.optimization-online.org/$DB_HTML$/2009/03/2263.*html*, 2010.

[10] B. Zeng and L. Zhao. Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method. *Operations Research Letters*, 41 :457–41, 2013.